VII

DISTRIBUCIONES BINOMIALES ASIMÉTRICAS

Por el doctor HUGO BROGGI
Profesor de Análisis matemático y de Matemáticas superiores

RESUMÉ

Distributions binomiales asymétriques. — L'auteur utilise un des résultats de son mémoire des *Rend. Accademia Lincei* (1925) à l'étude du problème de Simmons : les résultats auxquels il parvient coincident avec les obtenus par Simmons et par Frisch.

Si $p < \frac{1}{2}$ est la probabilité d'un événement E et Δ est la différence entre les probabilités que dans une série de n épreuves E se présente un nombre r de fois $< pn$ ou $> pn$, on a

$$\Delta = \frac{1}{3}(1 - 2p)\, M_n > 0$$

$$\frac{d\Delta}{dp} < 0$$

ou M_n est la valeur maximun de

$$\binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}.$$

DISTRIBUCIONES BINOMIALES ASIMÉTRICAS

1. Es

$$\binom{n}{r} p^r q^{n-r} \qquad (q = 1 - p)$$

la probabilidad que en n pruebas un acontecimiento de probabilidad constante p se presente r veces,

$$\sum_{r=0}^{r=n} r \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = np$$

el valor probable del número de pruebas en que el acontecimiento se presenta en las n.

Si, como suponemos, np es un número entero, a $r = np$ corresponde el valor máximo

$$\binom{n}{np} p^{np} q^{nq}$$

que expresamos por M_n, de la expresión

$$\binom{n}{r} p^r q^{n-r}.$$

Puede preguntarse ahora si sea igualmente probable que el acontecimiento considerado se presente menos de np veces, o más. La contestación es, evidentemente, afirmativa si $p = q = \frac{1}{2}$.

Si es $p < \frac{1}{2}$ es más probable que el acontecimiento se presente un número de veces menor de np, de lo que sea que se presente un número de veces mayor de np, y la diferencia Δ entre las probabilidades correspondientes a las dos diferentes frecuencias crece con el decrecer de p. Es este el resultado al cual llegan Simmons (¹) y más recientemente

(¹) *Proceedings of the London Mathematical Society*, XXVI, 1895.

Frisch [1] y Guldberg [2]. El primero de los autores citados no llegó a demostrar la proposición formulada en toda su generalidad, pero llegó a calcular en casos particulares muy extensos un valor aproximado de Δ. Supone Simmons que a, b, h sean números positivos y enteros y que sea

$$a < b, \qquad p = \frac{a}{a+b}, \qquad q = \frac{b}{a+b}, \qquad n = h(a+b)$$

y llega a demostrar que

$$\frac{1}{3}(q-p)\,\mathrm{M}_{n+a+b} < \Delta < \frac{1}{3}(q-p)\,\mathrm{M}_n.$$

Si n es grande puede, por tanto, admitirse que sea

$$\Delta = \frac{1}{3}(q-p)\,\mathrm{M}_n;$$

a resultados análogos llega él suponiendo n cualquiera (es decir, no únicamente de la forma $h(a+b)$) y $a = 1$.

2. Parece ahora natural que se pregunte si la determinación de Δ no pueda fundarse sobre el desarrollo asintótico de la probabilidad

$$\binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

pasado de la *Teoría analítica* de Laplace a todos los tratados de cálculo de las probabilidades

$$\binom{n}{r} p^r q^{n-r} \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{x^2}{2npq}+\cdots} \qquad (x = r - np).$$

Pero mientras no tiene sentido que nos detengamos, como puede casi siempre hacerse, el primer término del exponente del segundo miembro, parece dudoso que se alcancen mejores aproximaciones si se toma en cuenta un número mayor de términos. Porque, aun si prescindimos del hecho que el segundo miembro no permite que substituyamos al valor $\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$ de M_n otro que más se aproxime al valor verdadero, se observa,

(1) *Skandinavisk Aktuariendskrift*, 1924. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, noviembre de 1924.

(2) En una conferencia tenida en la reunión anual de los matemáticos noruegos (1924) y citada por Frisch.

por ejemplo, que si tomamos en cuenta además de $\frac{-x^2}{2npq}$ los términos del orden de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (en la hipótesis sobre la cual se funda toda la deducción, que x pueda tomar valores del orden de $\sqrt{n}$) no se obtiene ya, como por el teorema de las probabilidades totales debería ser, el valor uno para la probabilidad que r tome uno cualquiera de los valores o, 1, ... n (los límites incluídos) sino un valor mayor de uno.

Admitiremos que sea

$$\mathrm{P}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(p-q)^2}{8npq} - \frac{x^2}{2npq} + \frac{p-q}{2npq}\left(x - \frac{x^3}{3npq}\right)}$$

la probabilidad que en n pruebas el acontecimiento considerado se presente $np + x$ veces [1] o, más exactamente, que $\mathrm{P}(x)\, dx$ exprese la probabilidad que la variable x, supuesta continua, tome un valor perteneciente al intervalo $(x, x + dx)$ y que, por consiguiente

$$\Delta = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{P}(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} \mathrm{P}(x)\, dx.$$

3. Es entonces no solamente

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(x)\, dx = 1$$

sino también

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} r p^r q^{n-r} = \int_{-\infty}^{+\infty} (np + x)\, \mathrm{P}(x)\, dx = np$$

$$\sum_{r=0}^{n} (r - np)^2 \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathrm{P}(x)\, dx = npq.$$

Obtenemos, en realidad, integrando por partes y poniendo por sencillez

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(p-q)^2}{8npq}} = \mathrm{C}, \qquad \mathrm{H}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{P}(x)\, dx, \qquad \mathrm{H}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathrm{P}(x)\, dx,$$

$$\mathrm{H}_1 = -\mathrm{C}npq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{de^{-\frac{x^2}{2npq}}}{dx} e^{\frac{p-q}{2npq}\left(x - \frac{x^3}{3npq}\right)} dx = \frac{p-q}{2} - \frac{p-q}{2npq} \mathrm{H}_2$$

[1] Confróntese U. Broggi, *Sulla teoria delle prove ripetute*, in *Rend. Accademia Lincei*, volumen I, serie 6ª, 1er semestre, fasciculo 5.

$$H_2 = -C\,\frac{2n^2p^2q^2}{p-q}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{de^{-\frac{p-q}{6n^2p^2q^2}x^3}}{dx}\,e^{-\frac{x^2}{2npq}+\frac{x(p-q)}{2npq}}\,dx = npq + \frac{2npq}{p-q}H_1$$

$$H_1 = \frac{p-q}{2} - \frac{p-q}{2npq}H_2 = \frac{p-q}{2npq}H_2 - \frac{p-q}{2} = 0.$$

$$H_2 = npq, \qquad H_1 = 0.$$

Obtenemos en menos de infinitésimos de orden superior, para lim $n=\infty$.

$$\frac{1}{C}\Delta = \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2npq}+\frac{p-q}{2npq}\left(x-\frac{x^3}{3npq}\right)}dx - \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2npq}+\frac{p-q}{2npq}\left(x-\frac{x^3}{3npq}\right)}dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2npq}}\left[\frac{p-q}{2npq}\left(\frac{x^3}{3npq}-x\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{p-q}{2npq}\right)^3\left(\frac{x^3}{3npq}-x\right)^3+\ldots\right]dx$$

$$= \frac{1}{3}(q-p)$$

y, por ser $C = M_n$

$$\Delta = \frac{1}{3}(q-p)\,C = \frac{1}{3}(q-p)\,M_n$$

en conformidad con el resultado de Simmons (para lim $n=\infty$) o, si $0 < p < \frac{1}{2}$

$$\Delta > 0, \qquad \frac{d\Delta}{dp} < 0$$

en conformidad con el resultado, general y puramente cualitativo, de Frisch. $\frac{d\Delta}{dp}$ es, en realidad, igual a la suma algebraica de tres términos, de los cuales dos son negativos y del orden de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, mientras el tercero es positivo y del orden de $\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

UGO BROGGI.

(Entregado a la secretaría de la Facultad el 5 de mayo de 1926; impreso en febrero de 1927.)